Seminar on Continuity in Semilattices

Volume 1 | Issue 1 Article 39

7-1-1977

SCS 38: Treillis Continus et Treillis Complètement Distributifs

Morike Kamara
Technische Universität Darmstadt, Germany

SEMINAR ON CONTINUITY IN SEMILATTICES (SCS)

NAME(S) *Morike Kamara (Darmstadt).*

DATE M	D	Y
July	*1*	*77*

TOPIC : *Treillis continus et treillis complètement distributifs.*

REFERENCE : *voir à la page 3.*

Dans un treillis continu T on appelle élément copremier, un élément p tel que $p \leqslant v \vee u$ implique $p \leqslant u$ ou $p \leqslant v$. On dit que T admet assez d'éléments copremiers, si tout élément de T est supremum d'éléments copremiers. Soit I l'intervalle-unité ; on désigne par $(\underline{CL} \cap \underline{SUP})(T,I)$ l'ensemble des morphismes de T dans I préservant les infs et les sups quelconques. T^{op} dénote le treillis mûni de l'ordre opposé de T ; le treillis T est dit bicontinu si T et T^{op} sont continus.

Il s'agit ci-dessous de démontrer le

<u>Théorème</u> : Dans un treillis continu T les conditions suivantes sont équivalentes

(1) T a assez d'éléments copremiers

(2) T est complètement distributif

(3) L'ensemble $(\underline{CL} \cap \underline{SUP})(T,I)$ sépare

(4) T peut être plongé dans une puissance de I; ce plongement préserve les sup et les inf quelconques

(5) T est bicontinu et T est distributif

(6) T^{op} est continu et T est distributif .

<u>Démonstration</u> : $(1) \Longrightarrow (2)$. Pour un treillis complet T la distributivité complète est équivalente à

$\bigwedge(\bigvee(a_{ij}|j\in J)|i\in I) = \bigvee(\bigwedge(a_{i\varphi i}|i\in I)|\varphi:I\to J$, $\forall a_{ij}\in T$, $i\in I, j\in J$; mais dans cette égalité une direction est évidente à savoir : le membre de droite est toujours $\leqslant$ à celui de gauche . Donc la distributivité complète est équivalente à

$\bigwedge(\bigvee(a_{ij}|j\in J)|i\in I) \leqslant \bigvee(\bigwedge(a_{i\varphi i}|i\in I)|\varphi:I\to J)$, $\forall a_{ij}\in T, i\in I$, $j\in J$. Soit donc un élément copremier p tel que $p \ll \bigwedge(\bigvee(a_{ij}|j\in J)|i\in I)$, cela entraine que $p \ll \bigwedge(a_{ij}|j\in J)$ pour tout $i\in I$, ce qui a pour conséquence, d'après la définition de $\ll$ qu'il existe $j_1,\dots,j_n$ tel que $p\leqslant a_{ij_1}\vee\dots\vee a_{ij_n}$; mais du fait que p est copremier il doit exister un j_k dans $\{j_1,\dots,j_n\}$ tel que $p\leqslant a_{ij_k}$; posons $j_k =: \varphi i$. On a donc que pour tout $i\in I$, il existe φi et $p\leqslant a_{ij_k}$, ceci entraîne que $p\leqslant \bigwedge(a_{i\varphi i}|i\in I)$; en étendant à toutes les fonctions de choix $\varphi:I\to J$ on obtient $p\leqslant \bigvee(\bigwedge(a_{i\varphi i}|i\in I)|\varphi:I\to J)$, $\forall a_{ij}\in T$, $i\in I$, $j\in J$. Enfin , comme les éléments copremiers engendrent T on en déduit l'inégalité de la distributivité complète.

(2)$\Longrightarrow$(3) cf. LAWSON[3], theorem 6 .

(3)$\Longrightarrow$(4) clair .

(4)$\Longrightarrow$(5) "

(5)$\Longrightarrow$(6) "

(6)$\Longrightarrow$(1) cf. HOFMAN-LAWSON[2], proposition 2.7.

<u>Corollaire</u> (PUDLÁK-TŮMA [5]) : Dans un treillis algébrique T les conditions suivantes sont équivalentes

(1) T est complètement distributif

(2) Tout élément compact de T est supremum d'un nombre fini d'éléments copremiers.

<u>Remarque</u>: La notion de "bicontinuïté" a été définie par Mislove 4 de la manière suivante : T et T^{op} sont continus et les topologies de Lawson , respectives , coincident. Mais si T est distributif , la continuité de T et T^{op} implique que les deux topologies sont identiques (Mislove) .

Références :

1. G. Gierz ,K. Keimel : A lemma on primes appearing in algebra and analysis . Houston J. Math. ,vol. 3, 2(1977) 207-224 .

2. K.H. Hofman ,J.D. Lawson : Irreducibility and generation in continuous lattices . Semigroup Forum vol.13(1977) 307-353.

3. J. D. Lawson :Intrinsec topologies in topological lattices and semilattices . Pacific J. Math. vol. 44(1973) 2 593-602.

4. M. Mislove, manuscrit non titré .

5. P. Pudlák , J. Tůma : Yeast graphs and fermentation of algebraic lattices ,Coll. Math. Lattice theory , 1976 301-343.